

Berechnung der Abstrahlung einer Kreisscheibe durch Lösung des gemischten Randwertproblems

Rudi Volz, Michael Möser

Institut für Technische Akustik, TU Berlin; Email: rudi.volz@tu-berlin.de; m.moester@tu-berlin.de

Einleitung

Wird die Abstrahlung eines Plattenstreifens bei bekannter Schnelleverteilung auf der Oberfläche durch Verwendung des Rayleigh'schen Strahlungsintegrals angenähert, so wird im Bereich außerhalb des Streifens die Schnelle zu Null gesetzt („baffled“ Randbedingung). Dabei findet die akustische Kopplung zwischen Vorder- und Rückseite über den Rand des Plattenstreifens keine Berücksichtigung. Diese Kopplung besteht aber gerade bei tiefen Frequenzen im "akustischen Kurzschluss", bei dem nur eine geringe Abstrahlung erfolgt. Daher wird für tiefe Frequenzen eine zu große Schallabstrahlung prognostiziert und besonders die Richtwirkung in der Axialebene der Radscheibe überschätzt.

In dieser Arbeit wird, wie in dem auf der letzten DAGA vorgestellten Beitrag [1], ein Wellenansatz verwendet. Solche Ansätze zeigten sich bereits bei der Lösung von Innenraumproblemen recht erfolgreich im Vergleich zu konventionellen Verfahren (FEM) [2].

Erläuterung des Modells

In dem Modell wurden nur axialsymmetrische Anregemoden berücksichtigt. Dadurch war es ausreichend eine Schnittebene auszuwählen und auf dem Viertelkreis, an dem Teilraum 1 an Teilraum 2 grenzt, an diskreten Punkten die Übereinstimmung von Druck und Schnelle zu verlangen. Abbildung 1 zeigt das Modell. Bei einer dünnen Scheibe kann aus Symmetriegründen von einem Schalldruck $p = 0$ in der Ebene außerhalb der Kreisscheibe ausgegangen werden. Damit liegt ein gemischtes Randwertproblem vor, bei dem außerhalb der Scheibe der Druck und innerhalb der Scheibe die Schnelle vorgegeben

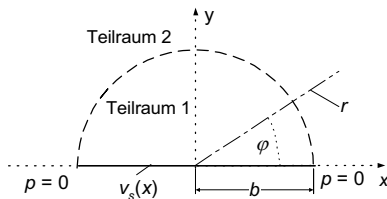


Abb. 1: Modell der Kreisscheibe.

b) mit $p = 0$ angenommen. Die Schnelle der Scheibe v_s wird als Modensumme vorgegeben (Membranschwingungen), also

$$v_s(x, y = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n J_0(X_n x/b). \quad (1)$$

Dabei ergeben sich die X_n als Nullstellen der Besselfunktion nullter Ordnung J_0 bzw. deren Ableitung J_0' . Das führt zu folgenden Modenformen (vgl. Tabelle 1), von denen drei vorgestellt werden.

Für die Berechnungen wurde als Anregung nur jeweils eine Mode gewählt. Die modale Schnelleamplitude der Anregemode v_s wurde für alle n mit 1 m/s angenommen.

Betrachtet wird die Abstrahlung in den oberen Halbraum. Zur Lösung des Problems wird der obere Halbraum in zwei Teilräume auf-

geteilt: Teilraum 1 sei der Raum innerhalb des Halbkreises, also für $r < b$. Teilraum 2 der Raum außerhalb des Halbkreises ($r > b$).

n	X_n	Form
1	0	Kolbenmembran
2	2,405...	Knoten am Rand
3	2,832...	Bauch am Rand
4	5,520...	Knoten am Rand
...

Tabelle 1: Anregemoden

Aufgrund der Symmetrie zur y -Achse nimmt man in Teilraum 2 symmetrische fortlaufende Wellen für den Schalldruck an

$$p_2(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n h_{2n-1}^{(2)}(k_0 r) \underline{P}_{2n-1}(\sin(\varphi)), \quad (2)$$

wobei C_n unbekannte zu bestimmende Koeffizienten, $h_{2n-1}^{(2)}$ sphärische Hankelfunktionen zweiter Art der Ordnung $2n-1$ und \underline{P}_{2n-1} Legendre-Polynome der Ordnung $2n-1$ darstellen. Im Teilraum 1 gilt für den Schalldruck der Ansatz

$$p_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(X_n x/b) \cos(k_n y) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0(X_n x/b) \sin(k_n y). \quad (3)$$

A_n und B_n sind unbekannte zu bestimmende Koeffizienten.

Die modalen Wellenzahlen k_n ergeben sich dabei aus

$$k_n = \begin{cases} +\sqrt{k_0^2 - (X_n/b)^2}, & k_0^2 - (X_n/b)^2 > 0 \\ -j\sqrt{(X_n/b)^2 - k_0^2}, & k_0^2 - (X_n/b)^2 < 0 \end{cases}. \quad (4)$$

Die unbekanntenen Koeffizienten B_n lassen sich aus den modalen Schnelleamplituden der Kreisscheibe bestimmen. Dazu ist eine Ableitung des Schalldrucks p_1 in Teilraum 1 (3) nach y zur Bestimmung der Schnellekomponente v_{1y} notwendig. Auf der Ebene der Anregung $y = 0$ muss der Ansatz für die modale Schnelle aus (1) mit $v_{1y}(y = 0)$ übereinstimmen. Damit folgt für p_1

$$p_1(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(X_n x/b) \cos(k_n y) - j\rho c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k_0}{k_n} V_n J_0(X_n x/b) \sin(k_n y). \quad (5)$$

An der Grenzfläche $r = b$ müssen Druck und Schnelle für die beiden Teilräume 1 und 2 übereinstimmen. Da die Ansätze zur y -Achse symmetrisch sind, reicht der Bereich $0 < \varphi < \pi/2$ aus. In diesem Abschnitt wird die Übereinstimmung von Druck und Schnelle an N_S Stützstellen gefordert. Dies führt zu einem Gleichungssystem mit den unbekanntenen Koeffizienten A_n und C_n .

Die Fernfeldnäherung führt (2) zu

$$\left| p_f(r, \varphi) \right| = \frac{1}{k_0 r} \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\pi} P_{2n-1}(\sin(\varphi)) \right| \quad (6)$$

(für die Berechnungen wurde $r = ?$ gewählt) und damit ergibt sich für den Schalldruckpegel

$$L_p = 20 \cdot \log |p_f|.$$

Ergebnisse der Simulationsrechnungen

Die hier gezeigten Richtdiagramme wurden für drei Anregemoden ($n = 1, 3, 4$ in (1), Abb. 2-4) ermittelt. Das Gleichungssystem wurde einerseits mit einer gleichen Anzahl von Stützstellen N_S und unbekannt Moden N (quadratisches Gleichungssystem) sowie mit mehr Stützstellen als Moden gelöst („least squares“). Zusätzlich ist die Fernfeld-Näherung für das Rayleigh-Integral („baffled“) zum Vergleich eingetragen. Es wurden zwei Frequenzen ausgewählt.

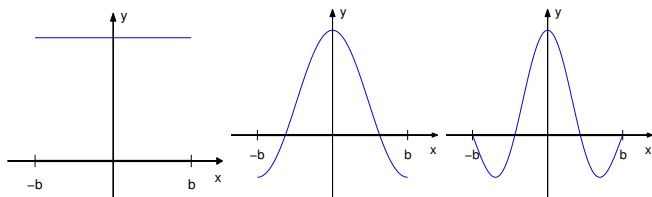


Abb. 2: Mode $n = 1$. Abb. 3: Mode $n = 3$. Abb. 4: Mode $n = 4$.

Insgesamt treten recht ähnliche Ergebnisse in allen gezeigten Fällen auf. Das Rayleigh-Verfahren erzeugt systembedingt den Fehler einer Abstrahlung in x -Richtung (d.h. für $\varphi = 0$) aufgrund der „baffled“-Randbedingung. Beim neuen Verfahren dagegen wird die Dipolwirkung der Kreisscheibe berücksichtigt. Dies macht sich besonders bei 250 Hz bemerkbar, da bei dieser tiefen Frequenz das Verhältnis von Breite des Plattenstreifens zur Luftwellenlänge klein ist

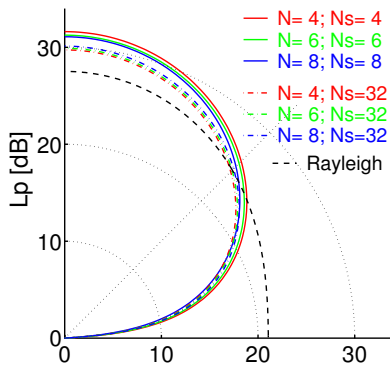


Abb. 5: 250 Hz, $n = 1$.

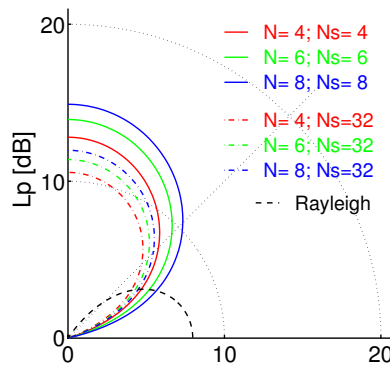


Abb. 6: 250 Hz, $n = 3$.

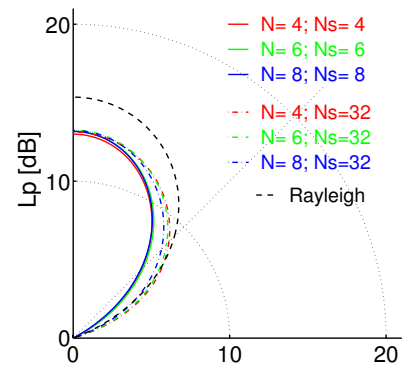


Abb. 7: 250 Hz, $n = 4$.

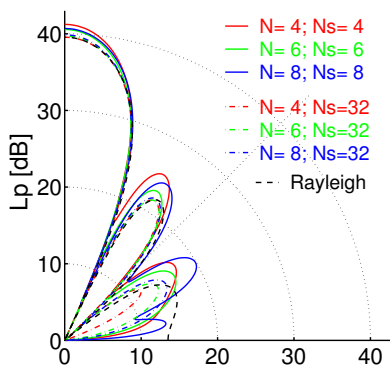


Abb. 8: 1000 Hz, $n = 1$.

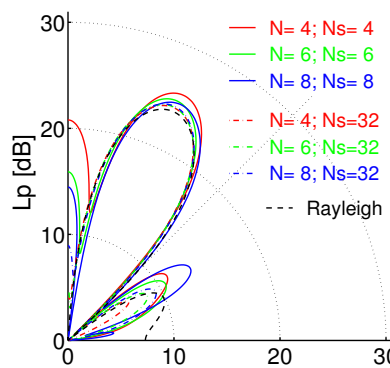


Abb. 9: 1000 Hz, $n = 3$.

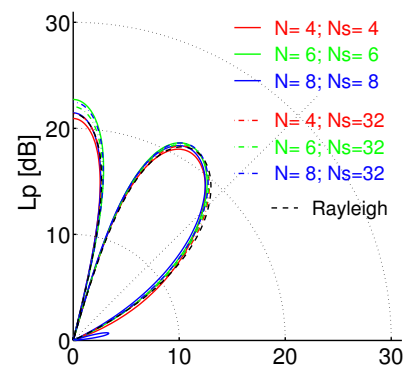


Abb. 10: 1000 Hz, $n = 4$.

und daher der Unterschied zur „baffled“ Randbedingung beim Rayleigh-Verfahren deutlicher zu Tage tritt (Abb. 5 bis 7). Es zeigen sich systematische Unterschiede zwischen den Lösungen des quadratischen und des überbestimmten Systems. Dies gilt besonders für $n = 3$ (Abb. 6).

Bei 1000 Hz treten ebenfalls Unterschiede zwischen dem quadratischen und dem überbestimmten Gleichungssystem auf (Abb. 8-9). Dabei stimmen die Ergebnisse, besonders im Bereich der Nebenkeulen, deutlich besser mit dem Rayleigh-Verfahren überein. Das quadratische Glg.-system führt zu einer Sensibilität bezüglich der berücksichtigten Moden N im Bereich der Nebenkeulen.

Zusammenfassung

Das neue Verfahren zeigt für das dreidimensionale Modell der Kreisscheibe plausible Ergebnisse (Vergleich mit dem Rayleighverfahren als Referenz bei hohen Frequenzen) und ein stabiles Verhalten in bezuglich der Modenanzahl N . Die Lösung durch ein überbestimmtes Gleichungssystem liefert insgesamt bessere Ergebnisse.

Danksagung

Dieses Projekt wurde mit Mitteln des BMBF im Rahmen des Projektes „Leiser Verkehr - Entwicklung Simulationstool Rollgeräusche für Schienenfahrzeuge und Fahrwege“ gefördert.

Literatur

- [1] R. Volz, M. Möser: Berechnung der Abstrahlung eines Plattenstreifens durch Lösung des gemischten Randwertproblems. DAGA 2002, Bochum, 2002
- [2] W. Desmet: A wave prediction technique for coupled vibro-acoustic analysis. PhD Thesis, K.U. Leuven, division PMA, 1998